

## Correction Devoir maison n°14

**Exercice 1**

On considère l'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

1. On voit que  $\begin{pmatrix} 3 \times 0 + 0 \\ 2 \times 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$  donc l'espace est non vide.

Soient  $X_1 = \begin{pmatrix} 3y_1 + z_1 \\ 2y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} \in E$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 3y_2 + z_2 \\ 2y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \lambda X_1 + X_2 &= \lambda \begin{pmatrix} 3y_1 + z_1 \\ 2y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_2 + z_2 \\ 2y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(3y_1 + z_1) + (3y_2 + z_2) \\ 2\lambda y_1 + 2y_2 \\ -\lambda z_1 - z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) \\ 2(\lambda y_1 + y_2) \\ -(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix} \in E \end{aligned}$$

L'espace  $E$  est un espace vectoriel.

2. On a

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 3y \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } E = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est donc libre.

## Exercice 2

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  et l'ensemble  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ .

1. On a  $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a  $A \times 0 = 0$  donc le vecteur nul appartient à  $F$ .

Soient  $X, Y \in F$  (On a donc  $AX = 0$  et  $AY = 0$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On calcule

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0$$

Donc  $F$  est un espace vectoriel.

2. On résout le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Ainsi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + 2y + 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

## Exercice 3

On note  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. La fonction  $x \rightarrow x \ln(x) \neq 0$  est dérivable en tant que produit de fonction dérivable sur  $]1, +\infty[$  et ne s'annule pas. donc  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et

$$\forall x \in ]1, +\infty[, f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(x \ln(x))^2} < 0$$

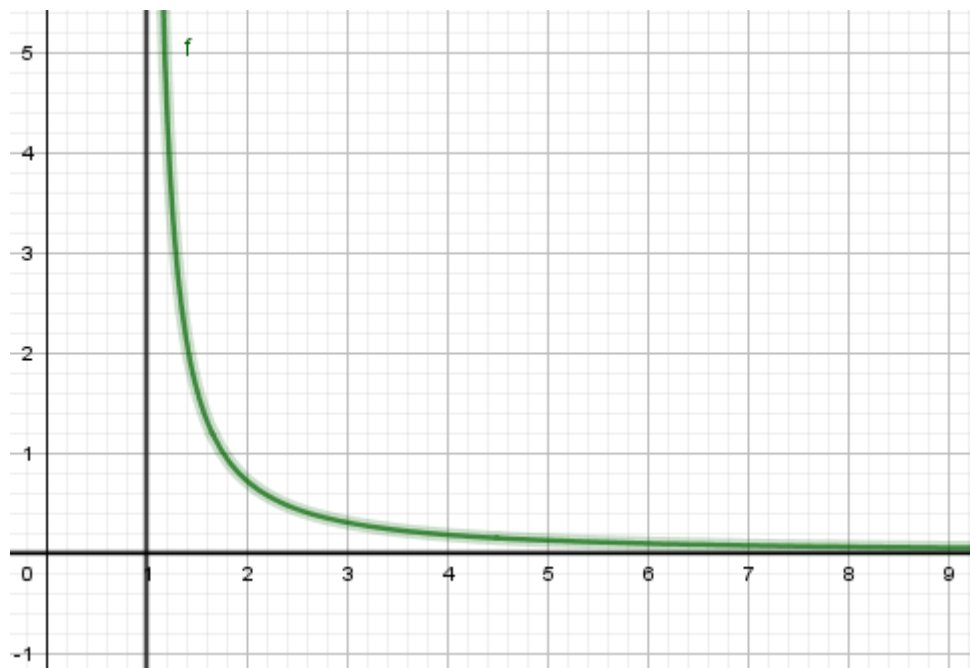
car  $\ln(x) > \ln(1)$  donc  $f' < 0$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0.$$

Il y a une asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln(x)} = +\infty.$$

Il y a une asymptote verticale.



2. Pour  $k \geq 3$  on a  $k - 1 \geq 2 > 1$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[k - 1, k]$  et  $f(k) \leq f(x) \leq f(k - 1)$  pour tout  $x \in [k - 1, k]$

Et comme  $k - 1 \leq k$  alors pour tout  $k \geq 3$ ,

$$\int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt$$

$$\iff f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ , on note  $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$

3. (a) Pour  $n \geq 3$ , on somme alors ces inégalités de 3 à  $n$ .

$$\sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1)$$

On rectifie la somme de gauche :

$$\sum_{k=3}^n f(k) = \sum_{k=2}^n f(k) - f(2).$$

En utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_2^n f(x) dx$$

Et en utilisant un changement de variable :

$$\sum_{k=3}^n f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \sum_{k=2}^n f(k) - f(n)$$

d'où finalement pour tout entier  $n \geq 3$  -et également pour  $n = 2$ - donc pour  $n \geq 2$

$$\boxed{S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}}$$

(b) On calcule

$$\int_2^n f(x) dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

D'après l'inégalité précédente, on a

$$S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{1}{2 \ln(2)} \quad \text{et} \quad \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)} \leq S_n$$

d'où les deux inégalités :

$$\boxed{\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}$$

(c) En divisant de part et d'autre par  $\ln(\ln(n)) > 0$  on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2 \ln(2) \ln(\ln(n))}$$

et par encadrement

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ , on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. Pour montrer que ces suites sont adjacentes, il faut montrer que l'une est décroissante, l'autre croissante et la différence tend vers 0 :

— On calcule

$$v_n - u_n = S_n - \ln(\ln(n)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$$

et comme  $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  alors

$$\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$  et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0}$$

— Pour la suite  $u$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+2)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_{n+1}^{n+2} = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de la question 2 pour  $k = n + 2$ .

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

— et de même pour la suite  $v$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+1)) - S_n + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_n^{n+1} = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0 \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes. Elles ont donc une limite commune  $\ell$ .

5. (a) Comme la suite  $(v_n)$  est décroissante et  $(u_n)$  croissante, on a  $u_n \leq \ell \leq v_n$  et en retranchant  $v_n$  on obtient  $u_n - v_n \leq \ell - v_n \leq 0$  avec  $v_n - u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$  d'après l'inégalité de la question 2 pour  $k = n+1$  d'où

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

- (b) On a alors  $v_n$  qui donne une valeur approchée de  $\ell$  à  $\frac{1}{n \ln(n)}$  près.

Il faut donc calculer la somme  $S_n$  jusqu'à ce que  $\frac{1}{n \ln(n)}$  soit inférieur à  $10^{-2}$  :

```
n= 2
while 1/(n*log(n)) > 10^{-2} do
    n = n+1
end
S = 0
for k = 2 : n
    S = S + 1/(k*log(k))
end
v = S - log(log(n))
disp(v)
```

On peut également calculer

```
n= 2
S = 0
while 1/(n*log(n)) > 10^{-2} do
    n = n+1
    S = S + 1/(n*log(n))
end
v = S - log(log(n))
disp(v)
```

## Exercice 4

On considère, pour tout entier naturel  $n$ , l'application  $\varphi_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. La fonction  $\varphi_0 : x \rightarrow e^{-2x}$  est une fonction continue sur  $[0; 1]$  en tant que composée de fonction continue. L'intégrale  $I_0$  existe et

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \left[ \frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc  $I_0 = \frac{1 - e^{-2}}{2}$ .

La fonction  $\varphi_1 : x \rightarrow (1-x)e^{-2x}$  est une fonction continue sur  $[0; 1]$  en tant que composée et produite de fonctions continues. L'intégrale  $I_1$  existe et

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x} dx$$

On pose les fonctions

$$\begin{aligned} u(x) &= 1-x & v'(x) &= e^{-2x} \\ u'(x) &= -1 & v(x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[ -\frac{(1-x)}{2} e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

On obtient  $I_1 = \frac{1 + e^{-2}}{4}$ .

2. Pour  $x \in [0, 1]$ , on a  $1-x \in [0, 1]$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &(1-x)^n \geq (1-x)^{n+1} \\ \implies &(1-x)^n e^{-2x} \geq (1-x)^{n+1} e^{-2x} \\ \implies &\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx \\ \implies &I_n \geq I_{n+1} \end{aligned}$$

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3. Pour tout  $x \in [0, 1]$ , pour tout entier  $n$ ,

$$\begin{aligned} (1-x)^n \geq 0 &\implies (1-x)^n e^{-2x} \geq 0 \\ &\implies \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0.}$$

4. La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{Donc la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

5. On a

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], e^{-2x} \leq 1.}$$

6. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} (1-x)^n e^{-2x} &\leq (1-x)^n \\ \implies \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx &\leq \int_0^1 (1-x)^n dx \\ \implies I_n &\leq \left[ \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 \\ \implies I_n &\leq 0 - \frac{-1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

7. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

8. La fonction  $\varphi_{n+1}$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant que composée et produit de fonctions continues. L'intégrale existe et

$$2I_{n+1} = 2 \int_0^1 (1-x)^{n+1} \times 2e^{-2x} dx$$

On définit

$$\begin{aligned} u(x) &= (1-x)^{n+1} & v'(x) &= 2e^{-2x} \\ u'(x) &= -(n+1)(1-x)^n & v(x) &= -e^{-2x} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} &= \left[ -(1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= 0 - (1)^{n+1} e^0 - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n}$$

9. D'après l'égalité précédente, on a

$$2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n \iff nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$  donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1.}$$

10. Toujours en utilisant l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} nI_n - 1 &= -I_n - 2I_{n+1} \\ \Leftrightarrow n(nI_n - 1) &= -nI_n - 2nI_{n+1} \\ \Leftrightarrow n(nI_n - 1) &= -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \end{aligned}$$

Or d'après les questions précédentes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_{n+1} = 1$ . Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1) = -3.}$$

11. En reprenant la relation

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

On remarque que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = a = 0$  et donc

$$\boxed{a = 0.}$$

En multipliant l'expression par  $n$  et en remplaçant  $a$  par 0, on obtient

$$nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

On remarque alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = b = 1$  et donc

$$\boxed{b = 1.}$$

Enfin, en soustrayant 1 et en multipliant par  $n$  dans la relation pour  $I_n$ , on a

$$n(I_n - 1) = c + \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

On remarque alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(I_n - 1) = c = -3$  et donc

$$\boxed{c = -3.}$$

En conclusion,

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0}$$